**Vektoren und lineare Gleichungssysteme**

Vektoren und Vektorräume

Ein Bild, das Text enthält.

Automatisch generierte BeschreibungEin Vektorraum über *R* ist eine Menge V von Vektoren mit einer Addition + : V × V → V , einer Multiplikation mit einem Skalar · : R × V → V und einem Nullvektor 0 ∈ V , so dass für alle u, v, w ∈ V und λ, µ ∈ R die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

Lineare Hüllen und Linearkombination

Seien u(1), . . . , u(n) ∈ V Vektoren eines reellen Vektorraums und α1, . . . , αn ∈ R skalare Koeffizienten. Dann ist v = α1 · u(1) + . . . + αn·u(n) eine Linearkombination der Vektoren u(1), . . . , u(n) und die Menge   
U = < u(1), . . . , u(n) > = {α1 · u(1) + . . . + αnu(n) : α1, . . . , αn ∈ R} aller möglichen Linearkombinationen ist die lineare Hülle der Vektoren u(1), . . . , u(n).

Lineaere Abhängigkeit

Die Vektoren u(1), . . . , u(n) ∈ V sind linear abhängig, wenn der Nullvektor eine Linearkombination der Vektoren ist, und mindestens ein Koeffizient dabei nicht 0 ist, es also α1, . . . , αn ∈ *R* gibt mit αk ≠ 0 für mindestens ein k ∈ {1, . . . , n}, so dass 0 = α1 · u(1) + . . . + αnu(n) . Dann ist mindestens einer der Vektoren durch die anderen als Linearkombination darstellbar. Ist das nicht möglich, so sind die Vektoren linear unabhängig.

Erzeugendensystem

Ist die lineare Hülle einer Menge von Vektoren u(1), . . . , u(n) ∈ V gleich dem Vektorraum selbst   
< u(1), . . . , u(n) > = V , so ist die Menge der Vektoren ein Erzeugendensystem. Ist die Menge der Vektoren dabei auch linear unabhängig, so ist die Menge eine Basis des Vektorraums und die Anzahl der Basisvektoren die Dimension kurz dim V des Vektorraums V.

Skalarprodukte und Euklidischer Vektorraum

Ein Skalarprodukt eines reellen Vektorraums ist eine Abbildung · : V × V → R mit den folgenden Eigenschaften für u, v, w ∈ V und λ ∈ R:

(u + v) · w = u · w + v · w , (λu) · w = λ · (u · w) Linearität im ersten Argument

u · v = v · u Kommutativität

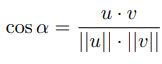
u · u ≥ 0 , und u · u = 0 nur wenn u = 0 Positive Definitheit

Für ein Skalarprodukt in komplexen Vektorräume gilt die Linearität auch für komplexe Faktoren und statt der Kommutativität gilt Hermitizität . Ein Vektorraum mit Skalarprodukt ist ein Euklidischer Vektorraum.

Länge eines Vektor

In einem euklidischen Vektorraum V ist die Norm oder Länge eines Vektors u ∈ V definiert als ||u|| = √(u · u).

Winkel zweier Vektoren

In einem euklidischen Vektorraum V ist der Winkel α ∈ R zwischen zwei Vektoren u, v ∈ V definiert durch

Die beiden Vektoren werden genau dann orthogonal zu einander bezeichnet, u⊥v, wenn u · v = 0 gilt.

Kreuzprodukt

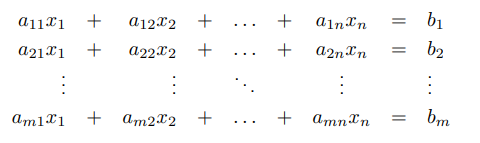
Für u, v ∈ R 3 ist das Kreuzprodukt u × v der beiden Vektoren definiert durch

Ein Bild, das Text, Gerät, Anzeige enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

Eigenschaften des Kreuzprodukts  
(1) Sind u, v ∈ V linear abhängig, so ist u × v = 0  
(2) Sind u, v ∈ V linear unabhängig, so ist w = u × v senkrecht auf u und v, w⊥u und w⊥v  
(3) Das Kreuzprodukt ist antisymmetrisch u × v = −v × u  
(4) Es gilt ||u × v|| = ||u|| · ||v|| ·sin ϕ, wobei ϕ ∈ [0, π] den Winkel zwischen u und v beschreibt, also dem Flächeninhalt dem von u und v aufgespannten Parallelogramms beträgt.

Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) in n Variablen (xi) und mit m Gleichungen ist mit Koeffizienten   
(aij ) ∈ C und (bi) darstellbar: 

Sind alle bi = 0, so ist das LGS homogen, sonst inhomogen.

drei elementare Umformungen:

(1) Vertauschen von Gleichungen

(2) Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor λ 6= 0

(3) Addition einer mit einem Faktor λ multiplizierten Gleichung zu einer anderen.

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder genau eine Lösung, unendlich viele Lösungen oder ist unlösbar.